15　場合の数，順列

133

(1)

男子の並び方×男子グループと女子 6 人の並び方より，$3!\cdot 7!=30240$ 通り

(2)

両端の男子の並び方×のこり 7 人の並び方より，${}_3\mathrm{P}_2\cdot 7!=30240$ 通り

(3)

女子 6 人の円順列×女子の間への男子の入り方より，$(6-1)!\cdot {}_6\mathrm{P}_3=14400$ 通り

補足

各女子は，場合の数の約束上，区別されるので，各女子間も区別される。

したがって，どの女子と女子の間を選ぶかで男子の入り方は ${}_6\mathrm{P}_3$ 通り。

134

4 桁の整数の千，百，十，一の位の数をそれぞれ $a,\ b,\ c,\ d$ とすると，

$1000a+100b+10c+d=25(40a+4b)+10c+d$

よって，25 の倍数であるためには下 2 桁の数が 25，50，75 であればよい。

下 2 桁の数が 25 の 4 桁の整数

$7\cdot 7=49$ 通り

下 2 桁の数が 75 の 4 桁の整数

$7\cdot 7=49$ 通り

下 2 桁の数が 50 の 4 桁の整数

$8\cdot 7=56$ 通り

よって，$49+49+56=154$ 通り

135

(1)

2 の倍数の個数

一の位の数は $2,\ 4,\ 6$ のいずれかであればよいから，$3\cdot {}_5\mathrm{P}_4=360$

3 の倍数の個数

各位の数の和が 3 の倍数,

すなわち各位の数を 3 で割った余りの和が 3 の倍数であればよい。

そこで，$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のそれぞれを，3 で割った余りでグループ分けすると，

余りが -1 の組は $(2,\ 5)$，余りが 0 の組は $(3,\ 6)$，余りが 1 の組は $(1,\ 4)$

よって，各位の数の余りの和が 0 になるための組合せは $(2,\ 5,\ 3,\ 1,\ 4),\ (2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4)$

ゆえに，3 の倍数の個数は $2\cdot 5!=240$

(2)

3 の倍数かつ 2 の倍数だから，3 の倍数となる組合せ $(2,\ 5,\ 3,\ 1,\ 4),\ (2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4)$ で，

一の位が偶数となる 5 桁の整数の個数を求めればよい。よって，$2\cdot 4!+3\cdot 4!=120$

(3)

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 5$ より，2 でも 3 でも 5 でも割り切れない整数の個数を求めればよい。

2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B，5 の倍数の集合を C とすると，

$n(A) = 360$，$n(B) = 240$，$n(C) = 1 \cdot {}_5\mathrm{P}_4 = 120$

$n(A \cap B) = 120$，$n(B \cap C) = 1 \cdot 4! + 1 \cdot 4! = 48$（3 の倍数のうち，一の位の数が 5），

$n(C \cap A) = 0$（一の位の数が 0），$n(A \cap B \cap C) = 0$（一の位の数が 0）

よって，

$$
\begin{aligned}
n\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) &= n(U) - n(A \cup B \cup C) \\
&= {}_6\mathrm{P}_5 - \left(n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)\right) \\
&= 720 - (360 + 240 + 120 - 120 - 48 - 0 + 0) \\
&= 168
\end{aligned}
$$

136

(1)

12 の倍数の個数

$864 = 2^5 \cdot 3^3 = \left(2^2 \cdot 3^1\right) \cdot 2^3 \cdot 3^2$ より，$(3+1)(2+1) = 12$

18 の倍数の個数

$864 = 2^5 \cdot 3^3 = \left(2^1 \cdot 3^2\right) \cdot 2^4 \cdot 3^1$ より，$(4+1)(1+1) = 10$

12 の倍数かつ 18 の倍数　すなわち 36 の倍数

$864 = 2^5 \cdot 3^3 = \left(2^2 \cdot 3^2\right) \cdot 2^3 \cdot 3^1$ より，$(3+1)(1+1) = 8$

よって，12 の倍数または 18 の倍数であるものの個数は $12 + 10 - 8 = 14$

12 の倍数の総和＝$12\left(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3\right)\left(3^0 + 3^1 + 3^2\right) = 12 \cdot 15 \cdot 13 = 2340$

18 の倍数の総和＝$18\left(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4\right)\left(3^0 + 3^1\right) = 18 \cdot 31 \cdot 4 = 2232$

36 の倍数の総和＝$36\left(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3\right)\left(3^0 + 3^1\right) = 36 \cdot 15 \cdot 4 = 2160$

よって，求める総和＝$2340 + 2232 - 2160 = 2412$

(2)

$a + b + c = 9$，$a \geq b \geq c \geq 1$ とし，$(a+1)(b+1)(c+1)$ の値を求めると，

a	b	c	$(a+1)(b+1)(c+1)$
7	1	1	32
6	2	1	42
5	3	1	48
5	2	2	54
4	4	1	50
4	3	2	60
3	3	3	64

よって，$l = m = n = 3$ で，正の約数は最大個数 64 をとる。

137

ア

7

イ

2

解説

面は合同な正三角形だから，1 の面の重心と 1 の面に平行な面の重心を通る直線を回転軸にすると，1 の面と辺を共有する 3 つの面は等価，1 の面と辺を共有しない 3 つの面は 1 の面に平行な面と辺を共有するのでこの 3 つの面も等価であることがわかる。

したがって，面の選び方は 1 の面と辺を共有するかしないかの 2 通り

ウ

1680

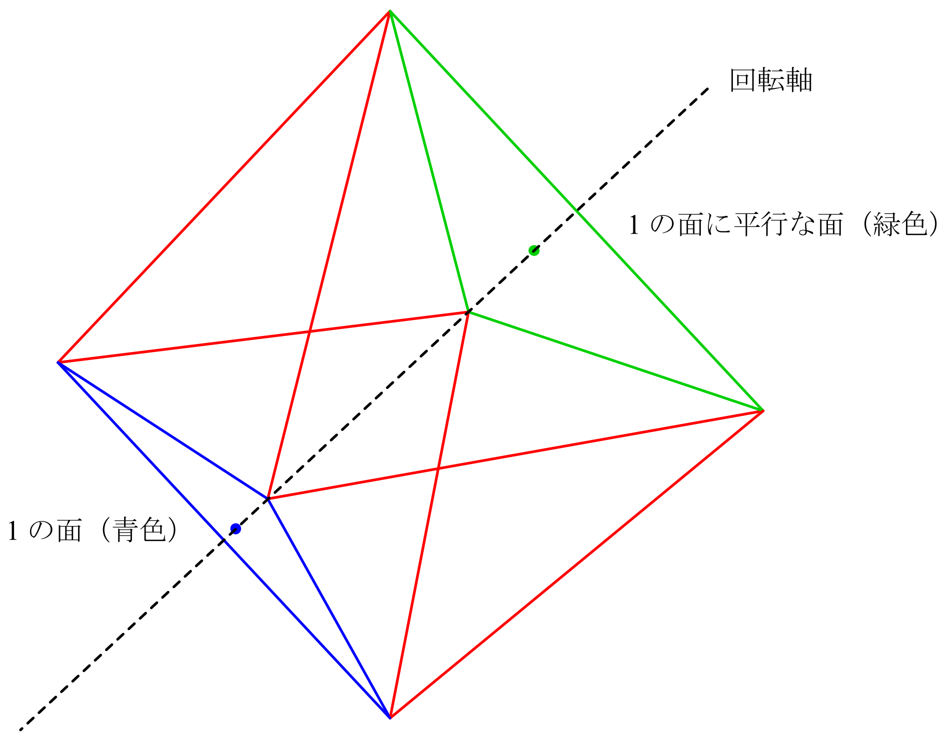
解説

1 の面を上の底面，1 の面に平行な面を下の底面とし，残り 6 面を側面とする。

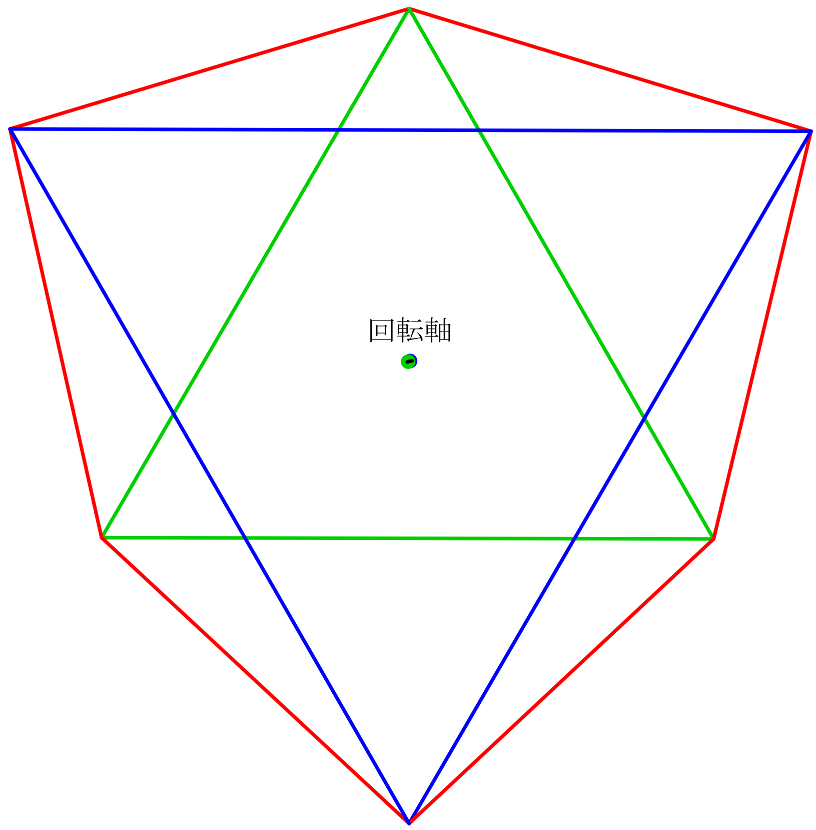
側面に対する数字の選び方は，特定の 1 つの数の側面を固定することにより，$5!$ 通り。

特定の 1 つの数の面の固定の仕方はイより，2 通り。

よって，1 に平行な面の数字の選び方×側面の順列より，$7 \cdot 2 \cdot 5! = 1680$ 通り。



赤線と青線で囲まれた 3 つの面，赤線と緑線で囲まれた 3 つの面は
それぞれ等価であることが下図からわかる。



138

(1)

略

(2)

解法 1

最高位の数の選び方は 1〜9 の 9 通り。

最高位の数を a とすると，もう 1 つの数の選び方は a を除く 9 通り。

そこで，もう 1 つの数を b とすると，最高位以外の $n-1$ 個の各位の数は a か b かだから，

その順列の数は 2^{n-1} であるが，2 種類の数字から成り立っていなければならないことから，

a のみの場合は除かれる。よって，$2^{n-1}-1$。

ゆえに，$9\cdot 9\left(2^{n-1}-1\right)$　すなわち $81\left(2^{n-1}-1\right)$

解法 2

(i) 0 を含む場合の個数

0 との組合せの数は 9

最高位以外の $n-1$ 個の位のうち k 個に 0 が入るとすると，その入り方の数は ${}_{n-1}\mathrm{C}_k$ で，

k については，2 種類の数字から成り立っていなければならないという条件より，

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-2$

よって，0 を含む場合の個数は

$$
\begin{aligned}
9\sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-1}\mathrm{C}_k &= 9\left(\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k - {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\right)\\
&= 9\left(2^{n-1}-1\right)
\end{aligned}
$$

(ii) 0 を含まない場合の個数

2 数の組合せの数は ${}_9\mathrm{C}_2=36$

n 個の位のうち k 個に一方の数が入るとすると，その入り方の数は ${}_n\mathrm{C}_k$ で，

k については，2 種類の数字から成り立っていなければならないという条件より，

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$

よって，0 を含まない場合の個数は

$$
\begin{aligned}
36\sum_{k=1}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_k &= 36\left(\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k - {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_n\right)\\
&= 36\left(2^n-2\right)\\
&= 72\left(2^{n-1}-1\right)
\end{aligned}
$$

(i)，(ii)より，求める個数は $9\left(2^{n-1}-1\right)+72\left(2^{n-1}-1\right)=81\left(2^{n-1}-1\right)$

139

2つの中点を結ぶ線分の長さは4通りあり, 仮に, 立方体の1つの辺の長さを2とすると, その長さは$\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{6}$, $2\sqrt{2}$である。

(i) 長さ$\sqrt{2}$の線分がつくる正多角形の数

正三角形, 正方形, 正六角形が可能である。

正三角形の数

ある1つの中点を頂点とする正三角形の数は2だから,

正三角形ののべの数は$2\times 12=24$

よって, 区別可能な正三角形の数は$\dfrac{24}{3}=8$

正方形の数

ある1つの中点を頂点とする正方形の数は2だから,

正方形ののべの数は$2\times 12=24$

よって, 区別可能な正方形の数は$\dfrac{24}{4}=6$

正六角形の数

ある1つの中点を頂点とする正六角形の数は2だから,

正六角形ののべの数は$2\times 12=24$

よって, 区別可能な正六角形の数は$\dfrac{24}{6}=4$

よって, 総数は$8+6+4=18$

(ii) 長さ2の線分がつくる正多角形の数

正方形が可能である。

ある1つの中点を頂点とする正方形の数は1だから, 正方形ののべの数は12

よって, 区別可能な正方形の数は$\dfrac{12}{4}=3$

(iii) 長さ$\sqrt{6}$の線分がつくる正多角形の数

正三角形が可能である。

ある1つの中点を頂点とする正三角形の数は2だから,

正三角形ののべの数は$2\times 12=24$

よって, 区別可能な正三角形の数は$\dfrac{24}{3}=8$

(iv) 長さ$2\sqrt{2}$の線分がつくる正多角形の数

1つの中点から同じ長さの線分が2本引けないため, 閉じた図形ができない。

よって, 0

(i)～(iv)より, 求める数は$18+3+8=29$

140

(1)

条件より，$(0,\ 9),\ (1,\ 8),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5)$の各組の 2 数のうち，どちらか 1 つが各桁の数として可能である。

千の位，百の位，十の位，一の位の順に選んでいくと，

千の位の数は 0 を除く 9 通り，百の位の数千の位で選んだ組の数を除く 8 つの数から 1 つ選べばよいから 8 通り，同様にして，十の位の数は 6 通り，一の位の数は 4 通り。

よって，$9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 = 1728$ 通り。ゆえに，1728 個

(2)

1 桁の数は 9 個，2 桁の数は$9 \cdot 8 = 72$ 個，3 桁の数は$9 \cdot 8 \cdot 6 = 432$ 個

よって，3 桁以下の数は$9 + 72 + 432 = 513$ 個

ゆえに，4 桁の数で小さい方から数えて$2000 - 513 = 1487$ 番目の数である。

千の位を固定したときの 4 桁の整数の数は$8 \cdot 6 \cdot 4 = 192$，

千と百の位の数を固定したときの 4 桁の整数の数は$6 \cdot 4 = 24$、

千，百，十の位の数を固定したときの 4 桁の整数の数は 4

よって，$1487 = 192 \cdot 7 + 24 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 3$ より，

千の位の数は 0 を除いて小さい順から 8 番目の数，すなわち 8,

百の位の数は$(0,\ 9),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5)$の小さい順から 6 番目の数，すなわち 6

十の位の数は$(0,\ 9),\ (2,\ 7),\ (4,\ 5)$の小さい順から 6 番目の数，すなわち 9

一の位の数は$(2,\ 7),\ (4,\ 5)$の小さい順から 3 番目の数，すなわち 5

よって，求める数は 8695

141

(1)

p^n の正の約数は$\{1,\ p,\ p^2,\ \cdots,\ p^n\}$

これと，$(1-p)(1+p+p^2+\cdots+p^n) = 1 - p^{n+1}$ より，

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^n = \frac{p^{n+1}-1}{p-1} \qquad \therefore S(p^n) = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$$

(2)

a と b は互いに素だから，a と b は共通な素因数をもたない。

したがって，a の約数と b の約数も互いに素である。

したがって，a の約数を$\{1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m\}$，$b$ の約数を$\{1,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n\}$とすると，

ab の正の約数は$\{1,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n,\ a_1,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ \cdots,\ a_1b_n,\ \cdots,\ a_m,\ a_mb_1,\ a_mb_2,\ \cdots,\ a_mb_n\}$

よって，

$$\begin{aligned}
S(ab) &= 1 \cdot (1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a_1(1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + \cdots + a_m(1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\
&= (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\
&= S(a)S(b)
\end{aligned}$$

(3)

2^n の素因数は 2 のみで，$2^{n+1}-1$ は奇数の素数だから，2^n と $2^{n+1}-1$ は互いに素である。

よって，(2)より，

$$\begin{aligned}S(m)&=S\left(2^n\left(2^{n+1}-1\right)\right)\\&=S\left(2^n\right)S\left(2^{n+1}-1\right)\\&=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\cdot\left\{1+\left(2^{n+1}-1\right)\right\}\\&=2^{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)\\&=2\cdot 2^n\left(2^{n+1}-1\right)\\&=2m\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}S(m)&=S\left(2^i3^j5\right)\\&=S\left(2^i\right)S\left(3^j5\right)\\&=S\left(2^i\right)S\left(3^j\right)S(5)\\&=\frac{2^{i+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{j+1}-1}{3-1}\cdot(1+5)\\&=\left(2\cdot 2^i-1\right)\left(3\cdot 3^j-1\right)\cdot 3\end{aligned}$$

これと，$S(m)=3m$ より，$\left(2\cdot 2^i-1\right)\left(3\cdot 3^j-1\right)\cdot 3=3\cdot 2^i3^j5$　$\therefore\left(2\cdot 2^i-1\right)\left(3\cdot 3^j-1\right)=5\cdot 2^i3^j$

この両辺を整理すると，$2^i3^j-2\cdot 2^i-3\cdot 3^j+1=0$　$\therefore\left(2^i-3\right)\left(3^j-2\right)=5$

$i,\ j$ は自然数だから，$2^i-3\geq -1,\ 3^j-2\geq 1$

よって，$\left(2^i-3,\ 3^j-2\right)=(5,\ 1),\ (1,\ 5)$　すなわち $\left(2^i,\ 3^j\right)=(8,\ 3),\ (4,\ 7)$

これと $i,\ j$ が自然数であることから，$\left(2^i,\ 3^j\right)=(8,\ 3)$　$\therefore i=3,\ j=1$

ゆえに，$m=2^33^15=120$